



TITLE:

場の量子論の数学的解析(7.素粒子論の未来へむけて,学問の系譜-アインシュタインから湯川・朝永へ-)

AUTHOR(S):

江沢, 洋

---

CITATION:

江沢, 洋. 場の量子論の数学的解析(7.素粒子論の未来へむけて,学問の系譜-アインシュタインから湯川・朝永へ-). 物性研究 2006, 86(3): 451-457

ISSUE DATE:

2006-06-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/110507>

RIGHT:

## 場の量子論の数学的解析

江沢 洋

最初、坂東さんから頂いた題が「素粒子論の系譜」でした。そういう話は、とても皆さんの前でお話するようなことはできないと思ひまして、題を変えさせて頂きました。

と言っても、与えられた時間の中で、数学の話をするというのは、大変な話でありますけれども、頂いたチャレンジであるということで、やってみますけれども、数学にはならないと思います。

[slide 1] 歴史の話をするわけですが、だいたい数学的な話が始まったという一つのきっかけは、1950年代に Friedrichs、それから1952年には van Hove ですね。正準交換関係の表現に非同値なものがあるということを指摘したのですね。それが一つの大きな動機になっていると思うのですが、正準交換関係の非同値表現があるということですね。



1950 Friedrichs, 1952 van Hove:

正準交換関係の 非同値表現

### 1. 場の理論の公理 (~ 1950)

#### (1) 相対論的量子力学である

ヒルベルト空間  $\mathcal{H}$ : 状態はベクトル(射線)  $\Phi \in \mathcal{H}$

非斉次ローレンツ変換: 連続ユニタリ規約表現  $U(a, \Lambda)$

$$U(a, 1) = \exp[iP^\mu a_\mu], \quad P^\mu: 4 \text{ 元運動量}$$

真空の存在 (一意的)  $\Omega: U(a, \Lambda)\Omega = \Omega$

#### (2) 場の演算子 $\varphi(f), f \in \mathcal{S}$

domain  $D$ : linear space, dense in  $\mathcal{H}$ , s.t.

$$U(a, \Lambda)D \subset D, \quad \varphi(f)D \subset D, \quad \varphi(f)^*D \subset D.$$

#### (3) 局所可換性

$$[\varphi(f), \varphi(g)] = 0 \quad \text{if} \quad \text{suppt } f, g: \text{space-like.}$$



注意  $[\varphi(x, t), \pi(x', t)] = i\hbar\delta(x - x')$   
は sharp-time field の存在を仮定。

[Slide 1]

それから真空が存在すると。そういうのを、一意的に存在して、そしてこの非斉次ローレンツ変換に関して invariant である、というわけです。

これはさっきちょっとと言いましたけれども、場の演算子というのがあると。この  $\varphi(f)$  と書いたのは、本来はローカルな field で、 $\varphi(x)$  と、 $x$  の、時空の座標の関数なわけですが、個々の点を取りますと、それは operator にならないということが、いろいろな経験から分かっています、 $f$

そういうことを受けて、アメリカ、それからヨーロッパ、日本ではあまりなかったですけども、場の理論の公理的なアプローチというものが始まったわけです。公理論と言いますけれども、これこれの公理があって、それから場の理論がすべて導かれるという意味の公理では、全然ないのです。場の理論としては、当然、こういう性質を持たなければいけないと思うという。思うという、人によって違うわけで、非局所なんて考えは、この公理論のなかにはないわけです。局所場の範囲で、こういう性質は当然持つべきだということを、いくつか挙げてみて、それから一体何が出てくるか、そういうものが一般的な関心であったわけです。

どういふ公理があったかと言いますと、一つは相対論的量子力学であるということです。量子力学だというのは、Hilbert 空間というのがある、そしてその上のオブザーバブルと言いますか、演算子があるということです。

それから相対性理論というのは、非斉次ローレンツ変換、ポアンカレ変換の連続ユニタリ規約表現の  $U$  というのがある、これが時空の translation の generator ですけども、そういうものを通して、4 元運動量の operator というものがあると。

という、何回でも微分できて、それからゼロでないところが有限か、あるいは遠くで非常に早く減少するというような関数ができて、「ならず」というのですが、 $\varphi(x)$  と  $f(x)$  とをかけて、積分すると、formal にはそういうことですが、ならした operator というのを考えるということです。その operator の domain があってという話があります。

局所可換性というものを仮定すると、 $f$  と  $g$  というのがありまして、 $f$  と  $g$  の support が、互いに space-like であるという具合には、 $\varphi(f)$  という演算子と  $\varphi(g)$  という演算子が交換するということです。

伝統的な場の理論で言いますと、むしろ正準交換関係というのを仮定したいわけですが、そうしますとこれは、時間を等しくした演算子の交換関係ということが言えるわけです。そうしますと、これは sharp-time の、時間のちゃんと決まった場を考えなくちゃいけない。そういうものは、どうも operator になりそうもないということがありまして、場の理論の法理としては、局所可換性というのを仮定するということです。

ただ、後で構成的場の理論という話をいたしますが、公理系を満たすような場の example が実際にあるのかという問題も、起こってきたわけで、そういう問題をやるときは、ある意味で正準交換関係が、また入ってきますけれども。そういうことです。

### Wightman 関数

$$W[f_1, \dots, f_n] = \langle \Omega \varphi(f_1) \cdots \varphi(f_n) \Omega \rangle$$

場の演算子の性質は、 $\{W_n\}$  の性質に焼きなおされる。

場の公理： Wightman 関数で言い表わされる。

### 再構成定理

しかるべき性質をもつ  $\{W_n\}$  から、

ヒルベルト空間、場の演算子 が再構成できる。

場の理論をつくる戦略：

空間の cut-off ( $V$ )、運動量の cut-off ( $\kappa$ ) をして自由度を有限にする。

交換関係の 非同値性 の問題はない。

Wightman 関数  $W_n^{V,\kappa}$  をつくる。

極限  $V \rightarrow \infty$ ,  $\kappa \rightarrow \infty$  を調べる。

[Slide 2]

[slide 2] この場の理論の公理論をやるときに重要な役割を担うのが、真空期待値というもので、 $\varphi(f)$  というのは field operator です。field operator の任意個の積の真空期待値というものが、 $W$  汎関数になるわけですが、この汎関数の言葉に、先ほど要求した場の理論の公理というのを焼き直すことができます。詳しいことは言いません。

しかも、再構成定理というのがあります。汎関数のことを Wightman 関数とか、Wightman 汎関数とか言うわけですが、Wightman 関数のセットを与えますと、それからその元になった Hilbert 空間と、それから場の演算子というのを、再構成することができます。再構成定理というのがあります。ですから、場の理論の性質を調べるのには、Wightman 汎関数の性質を調べればよいということになるわけです。

これは後で、構成的な場の理論の話をするときに使うのですが、そういう場の理論の example を作る時に、どうすれば良いかというと、まず空間の cut-off をすると、有限の空間に場を閉じ込めてしまうと。それから運動量の cut-off をすると。そういうようなことをして、場の自由度を有限にする。

有限にしますと、最初に言った正準交換関係の非同値表現という問題は、実はなくなりまして、von Neumann の定理というものによって、すべての表現は unitary equivalent であると。大雑把に言うと、そういうことになりますので、どんな表現を使って、cut-off をした理論の Wightman 関数というものを、作っても良いなど。そういうものをまず作りまして、そしてその上で、体積を無限大にしたり、運動量の cut-off を無限大にしたりする極限があるということを調べると。

Wightman 関数の持つべき性質を、大抵持つのですけれども、持つかどうかというのは、もちろん

確かめる必要があるということです。そういう場の理論をつくる戦略が一つあるということになりまして、ここに書いておきました。

[slide 3] 場の公理論から何が出るかという話も、本当はしないといけないのですけれども、例えばこういうことがありまして、場の演算子ですね、ならした場の演算子というのを真空にかけます。そしていろいろな個数を掛けるとか、いろいろな関数  $f$  を持ってくるとか、そういうものを全体を取ってきますと、Hilbert 空間をはれると、こういうものは基本的な要請として加えるわけです。

## 2. 公理から導かれること：例

### Reeh - Schlieder の定理

$\varphi(f_1)\varphi(f_2)\cdots\varphi(f_j)\Omega$  の全体は  $\mathcal{H}$  を張る。ただし、 $\mathcal{O}$  は与えられたものとして

$$f_k, j \text{ を動かす。 } \text{suppt } f_k \subset \mathcal{O}.$$

### Haag の定理

$\varphi_1(x)$  : 質量  $m > 0$  の自由場、真空  $\Omega_1$ ,

$\varphi_2(x)$  : 非斉次ローレンツ共変な局所場、真空  $\Omega_2$

ある一時刻  $t$  に、ユニタリー変換  $V$  があって

$$V\varphi_1(f, t)V^{-1} = \varphi_2(f, t), \quad V\Omega_1 = \Omega_2$$

となれば、 $\varphi_2(x)$  も自由場である。

- sharp-time field  $\varphi(f, t)$  の存在を仮定。
- 相互作用表示、使えない。

[Slide 3]

## Ruelle の散乱理論

### 公理の追加

○  $P^\mu$  のスペクトラム： 真空、1-粒子状態、連続スペクトル

○ 行列要素

$h(\lambda)$  :

$$\tilde{B}(p) = \tilde{A}(p)h((p, p)) \text{ に対して}$$

$$\langle \Omega, B(x)B(y)\Omega \rangle = \Delta_+(x-y; m)$$

$$\text{定義: } B_f(t) = i \int_{x^0=t} f(x) \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x^0}} B(x) d^3x.$$

$f(x)$ : pos. freq. sol'n of Klein-Gordon eq.

このとき

$$\Phi(t) = B_{f_1}(t)B_{f_2}(t)\cdots B_{f_n}(t)\Omega \\ \text{converges as } t \rightarrow \pm\infty.$$

この極限で自由場が定まる。

[Slide 4]

実は、その公理論を使ってみますと、 $f$  の support、 $f$  がゼロでない空間の範囲というものを、勝手に小さくとっても、そういうものに固定して  $f$  を考えても、Hilbert 空間全体をはれるという、ある意味で大変意外な結果ですけれども、そういうものが公理論から導かれるわけです。

公理論から導かれることの例だけをお話するわけですが、Haag の定理というものがありまして、2つの field を考えると、 $\varphi_1(x)$  というのは、質量がゼロでない、自由場を考える。真空も  $\Omega_1$  というのがあったとします。

もしもう1つ、 $\varphi_2(x)$  というのがあって、真空を  $\Omega_2$ 、一応違っているとしても良いのですけれども、そういうものがありまして、それがあある一時刻  $t$  に、 $\varphi_1(x)$  と  $\varphi_2(x)$ 、ユニタリー変換があるということ仮定しますと、そういうものがありますと、 $\Omega_2$ 、一応違っているとしても良いのですけれども、そういうものがありまして、それがあある一時刻  $t$  に、 $\varphi_1(x)$  と  $\varphi_2(x)$ 、2番目のほうも、やっぱり自由場になってしまうという、Haag の定理というものが出てくるわけです。この場合、 $t$  については、ならしてなくて、空間についてだけならしているという意味で、最初の一般的な公理から離れているわけです。

このことは、 $t$  を sharp にしたところを除いては、本当なのですから、本当でありまして、いわゆる相互作用表示するのはだめだということになります。相互作用表示というのは、free field と、それから interactive field がユニタリー変換に結ばれるということですから。そうすると interactive と言いますが、実はそれは、free field になってしまうという implication があるわけですから。そういうことが出てきます。

[slide 4] それからもう1つ、Ruelle の散乱理論というものが、また一般的に出てくるわけですが、それを細かく話していると、時間がなさそうなので、大雑把にどういうことかと言います

と、Wightman 関数というものを与えると場の理論が決まるということがありますが、この Wightman 関数で、例えばこれはいくつか、積になっていますけれども、あるところでこれをちょん切って、こっちのほうの時間といいますか、この  $f$  の support は、時間でマイナス無限大のほうに極限を取ると、残りのほうはプラス無限大のほうに極限を取るというふうにしますと、これで S-matrix が決まる訳ですね。決まるわけですが、そういう、時間のこっちをマイナス無限大にして、こっちをプラス無限大にするという極限があるかという問題は、当然、起こるわけで、いくつかの手続きが必要ですが、そういう極限があります、作れますということです。

ですから散乱理論がこの Wightman の枠組みの中で、確かに作ることができるというのが、先ほど言った Ruelle の散乱理論というものです。そういうものも、公理論から導かれるわけですね。

[slide 5] 今はほんの一例を述べたわけですが、もっといろいろな性質が導かれます。案外、公理というのはきつくて、いろいろな結論が出てくるのです。

### 3. 構成的な場の理論

演算子論的なアプローチ

統計力学的なアプローチ、Wick 回転、

O-S 公理系

$P(\phi)_2$  模型： 発散は真空のエネルギーのみ

Osterwalder-Schrader の公理系をみたすこと

真空状態： 局所的にはフォック的

エネルギー・スペクトル： 真空、1-粒子状態、

$2m$  との間にスペクトルなし

摂動論との関係： グリーン関数、発散、漸近級数

ボレル総和可能、正しいグリーン関数を与える

$$\sum_n a_n := \int_0^\infty \left( \sum_n \frac{a_n}{n!} \sigma^n \right) e^{-\sigma} d\sigma$$

[Slide 5]

そういう動きがありまして、さっき、散乱理論ができると言いましたけれども、それは極限があるという話であって、それで作った S-matrix が本当に「1」と違うか、散乱が入っているかどうかということは全然言わないわけです。そういうものはありますということを行っているだけ。

それから、そもそも公理を満たすようなモデルが1つでもあるのかと、自由場は満たすわけですが、自由場ではつまらないわけで、相互作用があるようなモデルがあるのかという問題、これは公理系の話とは関係なくて、そういう問題があるわけです。

それをやろうという話が、1960 年ぐらいから始まりまして、1つは演算子論的なアプローチということで、先ほど言いましたように、空間を cut-off して、運動量を cut-off して作って、その cut-off を無限大にする極限が取れるかと。極限が Wightman の性質を持っているかというアプローチがありまして、これを現実の 4 次元空間のモデルでやるのは、ちょっとなかなか手に負えないというわけで、最初になされたのは、空間 1 次元、時間 1 次元、しかも scalar field のモデルなのです。それは割と成功しまして、場の理論として望ましい性質がいろいろと証明されたわけですが、それをさらに高次元の空間にするというのは、なかなか難しいわけですが、

そこで統計力学的なアプローチ、素粒子論の言葉で言うと、Wick rotation というものをして、時間を imaginary にする訳ですね。そうしますと、Wightman 関数の計算というので、実は場の積の一種の統計力学的な平均を計算すると、しかもそれは、古典統計力学で良いのだということになりまして、理論が近づきやすくなったわけですね。それでいろいろな性質が導かれたわけです。

Wightman 関数というのは、場の理論の公理を、Wightman 関数の言葉で翻訳すると、こうなるといったことがあったわけですが、Wightman 関数の性質を、今度は Wick rotation して、imaginary time にするとどうなるかと、それは Osterwalder-Schrader の公理系というのがあります。

ですから Wick rotation した後の場の理論というのでいきますと、Wightman 関数に相当するものは、Schwinger 関数といわれるものになるわけですが、Schwinger 関数のシステムを作って、それが実際、Osterwalder-Schrader の公理系を満たすかどうかと、そういう問題になったわけです。

空間 1 次元、時間 1 次元というモデルは、もちろんそういうやり方でもできたということです。いろいろな性質が導かれたということです。しかも摂動論との関係というのがありまして、Schwinger 関数というのを coupling constant  $\lambda$  に関して、展開したときにどうなるかという、これは発散するということです。発散するのですけれども、しかしそれは漸近級数として意味があって、しかも Borel 総和が可能であると。これは説明があるかどうかは知らないのですけれども、Borel 変換というものがあって、そうすると、級数が収束して、その収束した級数の和を取って、その Borel 変換をやると、もとの関数が出てくるわけです。だから、いわば発散級数に意味を持たせる一つの方法なのですから、そういうものをやりますと、それが正しい Schwinger 関数を与えるということが証明されました。

[slide 6] さらにそれを 3 次元の空間に移すと。3 次元の空間では、さっき言いました Osterwalder-Schrader の公理系を満たすようなモデルが作れると。しかもそれは non-trivial で、散乱現象があるということも、証明されています。それから、Borel 変換が有限な収束半径を持つということも証明されています。

$(\phi^4)_3$  模型:

O-S 公理系をみたす (回転不変性を別として)

non-trivial

Schwinger 関数、摂動級数は発散、

Borel 変換は有限な収束半径

$(\phi^4)_\nu$  模型:

$\nu = 4 + \epsilon$ : triviality (1981).

$\nu = 4$ : Schwinger 関数の摂動級数は Borel 総和可能 (1994).

ただ、言わなかったのですけれども、時間 1 次元、空間 1 次元という、いわば 2 次元のモデルでは発散はあるのですけれども、発散は真空のエネルギーだけの発散で、ハミルトニアンが何か引き算をしておけば有限になると。時空 3 次元のモデルでは、真空のエネルギーと mass が発散する。質量の繰り込みをしなきゃいけないという、発散する diagram は 1 つしかないという簡単なモデルはできましたということです。

さらに高次元、現実の 4 次元にいったらどうなるかということまで、来たわけですが、そうしますと、次元が  $4 + \epsilon$  であると、 $\epsilon$  正です、そういうときは、これは trivial な理論しかないと、triviality の問題になっている。つまり散乱行列が「1」になってしまうということです。それは perturbation に依らず厳密に証明された。1981 年。

[Slide 6]

$\nu = 4$  のときにどうなるかということは、最近、実はあまり勉強していないので、もしかしら証明されているかもしれないのですけれども、証明はないですね。

4 のときは、分からないけれども、いろいろな状況証拠から考えると、どうも trivial らしいということです。 $\nu = 4$  のときに、Schwinger 関数の摂動級数というものは、Borel 変換すると、有限な収束半径を持つという証明もあるのですね。

だから、ちょっと良く分からないのですけれども、可能性としては、場の理論というのは、大変微妙な object で、構成の仕方によって trivial になったり何になったりするという可能性は、最初に言いました交換関係の非同値表現ということから考えると、否定はできないわけです。何かのある作り方があって、trivial でないというものがあるかも知れないのです。

triviality という話が出てから、急に場の理論の論文の数が減ってしまったと思うのですけれども。Borel 変換が意味を持つという話は。。。

#### 4. 非相対論的な QED

輻射場と非相対論的な原子の相互作用

ハミルトニアンの特値解析

従来の初等量子力学：

まず輻射はないとして原子の特値をきめる

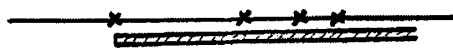
次に輻射との相互作用を入れて遷移確率を

計算（状態の時間発展）

Wigner-Weisskopf の摂動論

特値解析に徹すれば、埋蔵固有値に対する摂動、不安定状態

$\mathcal{H}_{\text{atom}} + \mathcal{H}_{\text{rad}}$  の特値



[Slide 7]

continuous spectrum が加わってくるわけですね。ですから励起状態というものが連続固有値のなかに埋まっていることになるわけで、そういう場合のハミルトニアンに、さらに相互作用を加えるときに、spectrum がどう変わるかと、これは簡単な話ではないのですね。そういう研究が今も続いていると言っても良いと思います。もちろん、その場合は、atom が非相対論的ですから、これだけでは充分ではないのですけれども、この問題がまだ未解決の問題が残っているということです。そういうふうな状況であります。

しかし、先ほど言ったように、最近、問題から離れてしまっていますので、もっと新しい発展が起こっていないとは言えないのですけれども、多分ないと思います。

#### 討論

大貫：ありがとうございました。ご質問はございませんか。さっきの momentum や volume をカットして有限にして、正準交換関係を表現ユニークにしますね。カットをだんだん大きくしていったときに、真空はどこに落ちてくわけですか。

江沢：それは時空 2 次元の場合しか分かっていないのですよ。真空の実際の性質が。

大貫：6 次元とか 5 次元、4 次元空間はわからない。

江沢：分かりません。

大貫：つまり真空はいろいろとあるわけですね。縮退して。

江沢：縮退しているということは分かります。相互作用の格好に依りますけれども。

大貫：coupling が決めるわけ。

江沢： $\varphi^4$  にしたら縮退しないのですけれども、 $\varphi^4 - \varphi^2$  とか、そういうふうにすると、縮退があっ

[slide 7] その後、どうなったかというわけですが、非相対論的な QED という話は、過去、復活しまして、これは radiation field は量子化するけれども、atom との相互作用を考えるのですけれども、atom は普通の Schrödinger 方程式を使うということなのです。

何が問題かと言いますと、普通の初等量子力学でやりますと、輻射場をまず考えません。そして原子の量子力学というのをやると、こういう discrete spectrum が出てきます。あるところから連続するということになりますけれども、discrete spectrum になります。そこから今度は time-dependent な摂動だということで、radiation を入れて、トランジションパウリ値を計算するというやり方を進めているわけです。

Wigner-Weisskopf の摂動論というものがあまして、それは transition まで入れて、複素固有値の問題になるわけです。

この問題を摂動によらないでやろうとすると、どうなるかと言いますと、これはいわゆる埋蔵固有値がある場合の摂動論ということになるわけで、こういう atom のハミルトニアンだけで言いますと、discrete spectrum があつた。だけどそこに radiation を入れると、

て、かつ、broken symmetry になるということはありません。ただ真空の細かい性質は、というか、具体的なイメージはできない。

2次元時空の場合には、locally Fock というのですけれども、無限大にしてしまった時空全体で考えると Fock 表現ではないと。だけれども、コンパクトな、有限な空間部分だけで考えると、それは Fock 表現で済むということが分かっています。しかし、次元が高いときには分かっているのです。

江口：大体、例えばフェルミオンが入った系というのは、取り扱うのは非常に難しいわけですか。

江沢：相互作用によるのですけれども、湯川相互作用の理論というのは、時空3次元までできています。

江口：符号のいやらしさとか、その辺はあまり関係がないのでしょうか。

江沢：符号というのは。

江口：フェルミオンの。つまり理論の解析で。その作用に。

江沢：それは大丈夫です。

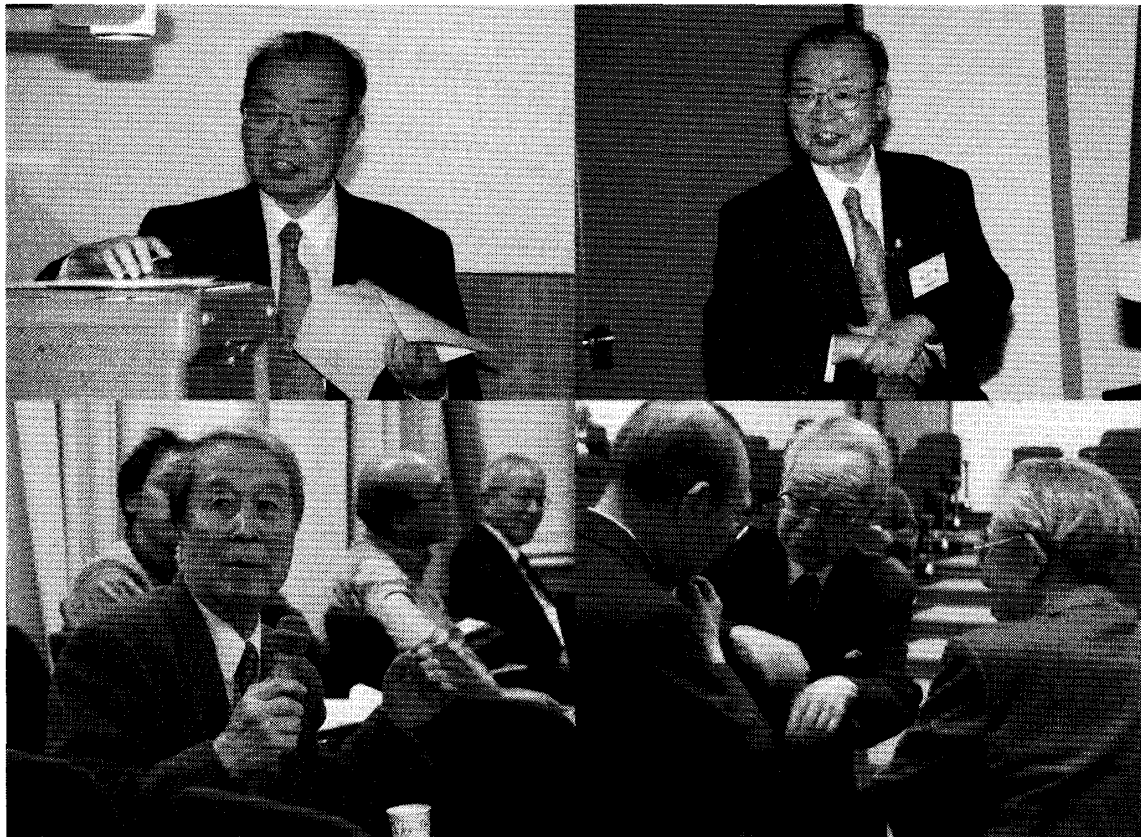
江口：例えば supersymmetric な例もあるのですけれども、どうでしょうか。

江沢：そちらはないですね。

大貫：よろしいですか。もう少し。

江口：良いと思います。

大貫：何かほかに、ご質問はあるでしょうか。それでは時間もオーバーしましたので、どうもありがとうございました。



ph12

江沢, 南部, 巽, 大貫